SOCIETE MATHEMATIQUE DE COTE D'IVOIRE - SMCI

SOCIETE MATHEMATIQUE
DE COTE D'IVOIRE (SMCI)

Concours Miss Mathématique 2016

NIVEAU : Terminale C

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Les cinq exercices sont indépendants.

1 RÉCONCILIATION

1.Les nombres *d*, *r* et *n* sont des entiers naturels, avec *n* non nul.
Démontrer que $(10d + r)^n$ et r^n ont le même reste dans la division euclidienne par 10.

2.Déterminer le chiffre des unités du nombre $(22\,222\,222)^5$.

3. ***a***) Vérifier que le nombre 3^4 - 1 est un multiple de 10 puis en déduire que pour tous nombres entiers naturels *k* et p,3^{4k+p} et 3^p ont le même reste dans la division euclidienne par 10.

b) Déterminer le chiffre des unités du nombre $3^{22\,222\,222}$.

4.Déterminer le chiffre des unités du nombre M = $(22\,222\,222)^5 \times 3^{22\,222\,222}$.

2 PAIX

Mahie offre à ses deux enfants Maela et Major, une plantation de forme triangulaire dont les côtés mesurent 4km, 3km et 5km. Les deux enfants souhaitent partager cet héritage en deux plantations ayantlemême périmètre et la même aire**.**
Pour cela, on considère le trianglerectangle ABC tel que : AB = 4, AC = 3 et BC = 5.
Le but de l'exercice est de trouver une droite (D) partageant le triangle ABC en deux polygones ayant le même périmètre et la même aire.

1. Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

2. En vous aidant des figures ci-dessous, trouvez toutes les droites qui permettent de partager ce triangle en deux polygones de même périmètre et de même aire. Justifier la réponse.

AN = x et AM = y
(D) coupe (AB) en M et (AC) en N.

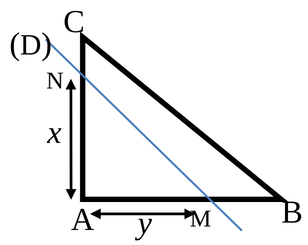


Figure 1

CN = x et CM = y
(D) coupe (BC) en M et (AC) en N.

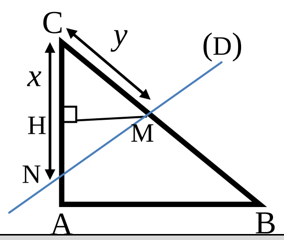


Figure 2

BN = x et BM = y
(D) coupe (BC) en M et (AC) en N.

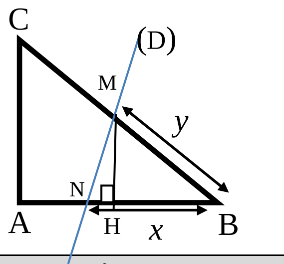
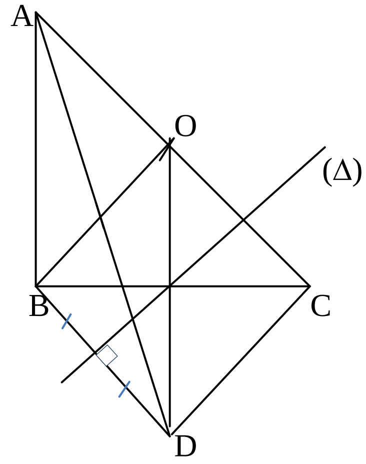


Figure 3

3 FRATERNITÉ

ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par O le milieu de [AC], D le symétrique de O par rapport à (BC).



1. ***a.*** Démontrer qu'il existe une rotation f qui transforme A en C et O en D.
Préciser les éléments caractéristiques de f.
b. Démontrer que $f = S_{(BO)} \circ S_{(AB)}$.

2. On pose : $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$ et on désigne par (Δ) la médiatrice de [BD].
Démontrer que h est la symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

4 SOLIDARITÉ

Mon lycée a le sens de l'innovation. Pour désigner un délégué parmi les élèves de ma classe, chaque électeur est invité à classer dans l'ordre de ses préférences les trois candidats, Ali, Bela et Caro. Lors du dépouillement, 1 point est attribué au candidat classé premier, deux points au deuxième et quatre points au troisième. On fait le total et le candidat ayant le score le plus faible est déclaré élu.
Ali obtient 44 points. Il est déclaré élu, alors que 4 élèves seulement l'ont classé premier. Caro obtient 45 points. Elle est celle que les électeurs ont classée le plus souvent en première position.
Bela obtient 51 points. Il est celui que les électeurs ont classé le plus souvent troisième.

1. Combien y a – t – il eu de votants?

2. Combien de fois les électeurs ont-ils classé Ali en deuxième position? En troisième position?

3. Combien de fois les électeurs ont-ils classé Caro en première position? En deuxième position?

5 DÉVELOPPEMENT

n étant un entier naturel quelconque donné, on admettra l'existence et l'unicité d'un polynôme $f_n(x)$ de la variable réel x tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) - f_n(x-1) = x^n$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que le monôme de plus haut degrédu polynôme $f_n(x)$ est : $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

2. Démontrer que pour $n \neq 0$, le polynôme $f_n(x)$ est divisible par $(x + 1)$.

3. Soit p un entier naturel non nul :
Démontrer que : $f_n(p) = 1 + 2^n + \ldots + p^n$.

4. Soit $f_n'(x)$ la dérivée du polynôme $f_n(x)$.
Justifier alors que pour $n \geq 1$, $f_n'(x) - nf_{n-1}(x) = f_n'(x-1) - nf_{n-1}(x-1)$.

Dans la suite on admettra que le polynôme $f_n'(x) - nf_{n-1}(x)$ est constant.

5. Démontrer que :Pour $n \geq 1$, $f_n'(x) - nf_{n-1}(x) = f_n'(0)$.

6. Justifie que : $f_n(x) = n\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt + nx\int_0^{-1} f_{n-1}(t)\,dt$.

7. Calcul de $f_n(x)$ pour $n \in \{0 ;1 ;2 ;3\}$.

a. Justifier que : $f_0(x) = x$.

b. Justifier que : $f_1(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$.

c. Justifier que : $f_2(x) = \dfrac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$.

d. Justifier que : $f_3(x) = \dfrac{1}{4}x^2(x+1)^2$.

8. En utilisant les égalités obtenues aux questions 3) et 7), justifier que :

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

c. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.