OPAM 2019 Jour 1

4 avril 2019

Durée : 4 h 30 min

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels définie par:

   - $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, et $a_2 = 12$; et
   - $2a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n = 0$ pour $n \geq 0$.

   Montrer que pour tout n appartient à $\mathbb{N}$, a_n est un entier strictement positif.

   (7 points)

2. Soit k un entier strictement positif. Considerons k nombres premiers pas necessairement distincts tels que leur produit soit dix fois leur somme. Quels sont ces nombres premiers et quelle est la valeur de k?

   (7 points)

3. Soit ABC un triangle, et D, E, F des points appartenant aux segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectivement tels que

   $$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}.$$

   Montrer que si les centres des cercles circonscrits aux triangles DEF et ABC coïncident, alors ABC est un triangle équilatéral.

   (7 points)

The English version is on the other side of the page. *(Total: 21 points)*

OPAM 2019 Jour 2

5 avril 2019

Durée : 4 h 30 min

4. Les tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC passant par B et C se coupent en D. Le cercle circonscrit au triangle BCD recoupe les cotés $[AC]$ et $[AB]$ respectivement en E et F. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que (AO) est perpendiculaire à (EF).

(7 points)

5. Un carré est divisé en N^2 petits carrés égaux non-superposés, avec $N \geq 3$. Considerons une ligne brisée (ou ligne polygonale) reliant tous les centres des petits carrés (Une telle ligne brisée peut s'intersecter).

   (a) Montrer qu'il est possible de trouver une ligne brisée composée de 4 segments pour $N = 3$.

   (b) Déterminer le nombre minimal de segments de cette ligne brisée pour N quelconque.

(7 points)

6. Trouver le 2019ème entier strictement positif n tel que C_{2n}^{n} ne soit pas divisible par 5.

(7 points)

The English version is on the other side of the page. *(Total: 21 points)*