ASSOCIATION TOGOLAISE POUR LA PROMOTION DES MATHEMATIQUESAU SECONDAIRE
Numéro 1411/MATDCL-SG-DLPAP-DOCA
P: 4125, LOMÉ TOGO ; Tel : 90 35 21 31 / 90 69 99 51/ 92464560/98 11 80 06/90 05 30 70
E-mail : follygbetouladede@gmail.com ou togomath@yahoo.fr

Sixième Édition des Olympiades Togolaises de Mathématiques (OTM) et Concours Miss Mathématiques : *1er Tour*

Date : 23 Avril 2016 **Niveau :** Terminale **Durée :** 3 h 45 min

N.B. *Il est demandé au candidat de laisser toute trace de recherches ; justifier et détailler ses réponses et de laisser une ligne au moins entre deux questions. Les dernières feuilles sont les brouillons.*

EXERCICE I (Uniquement pour les séries différentes de la série C)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct (O, U, V), on définit la transformation F, qui, au point M d'affixe $z = x + iy$ fait correspondre le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $z' = -2iz + 1 + 2i$.

1. Reconnaître F et donner ses éléments caractéristiques.

2. On considère la suite des points M_n de coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ définie par récurrence de la manière suivante : le point $M_0(x_0\,;\,y_0)$, est donné et diffèrent du point $\Omega\ (1\,;\,0)$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = F(M_n)$.

Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

Soit $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point M_n. On pose : $Z_n = z_n - 1$.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = -2iZ_n$.

On note d_n la distance de Ω à M_n.

4. Montrer que la suite (d_n) $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Cette suite est-elle convergente ? Exprimer d_n en fonction de n et de d_0 où $d_0 = \Omega M_0$.

5. Démontrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} - z_n = Z_{n+1} - Z_n$ et $Z_{n+3} - Z_{n+2} = -4(Z_{n+1} - Z_n)$.

Que peut-on alors dire, en justifiant, des droites (M_nM_{n+1}) et $(M_{n+2}M_{n+3})$?

EXERCICE II (Pour toutes les séries)

On se propose d'étudier la convergence de la suite u_n définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n+2}$.

1. Soit f la fonction définie, pour tout x élément de [0 ; 1], par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

a) Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Étudier le sens de variations de f. En déduire l'image de [0 ; 1] par f.

2. Démontrer que pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 1], $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique l dans l'intervalle [0 ; 1].

4. On pose : $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [0\,;1]$.

5. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$|u_{n+1} - l| \leq \frac{2}{3}|u_n - l|$, puis que $|u_n - l| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

En déduire la convergence de la suite (u_n) puis conclure.

6. Déterminer p tel que u_p soit une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

EXERCICE III (Uniquement pour les séries différentes de la série C)

1. Calculer les limites suivantes :

$$lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$$
$$lim_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt[6]{x - 2x^2 + x^4 + x^6 - 5}$$

2. On donne : $A = ln\left(\frac{\sqrt{5}\times 3^4}{27}\right)$. Écrire A sous la forme d'une somme de logarithmes.

ASSOCIATION TOGOLAISE POUR LA PROMOTION DES MATHEMATIQUESAU SECONDAIRE
Numéro 1411/MATDCL-SG-DLPAP-DOCA
P: 4125, LOMÉ TOGO ; Tel : 90 35 21 31 / 90 69 99 51/ 92464560/98 11 80 06/90 05 30 70
E-mail : follygbetouladede@gmail.com ou togomath@yahoo.fr

<u>EXERCICE IV</u> (Uniquement pour les séries différentes de la série C)

Pour tout entier naturel n, on définit le réel J_n par : $J_n=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{cos2x}{(sinx)^{2n+1}}dx$.

On définit ainsi une suite (J_n) de réels.

1. *a)* Justifier l'existence de J_n.

b) simplifier l'écriture $\frac{sinx}{1+cosx}+\frac{sinx}{1-cosx}$ et en déduire la valeur de J_0.

c) Déterminer le sens de variation de la suite (J_n).

2. On pose pour tout entier naturel n, $I_n=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{(sinx)^{2n+1}}dx$.

a) Déterminer une relation entre J_n, I_n et I_{n-1}.

b) Exprimer $\sum_{k=0}^{n}(J_k+I_k)$ en fonction de I_n, I_0 et J_0.

c) Établir que pour tout entier naturel n, $I_n \geq \frac{\pi}{12}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$.

(On pourra minoriser la fonction $x \longmapsto \frac{1}{(sinx)^{2n+1}}$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$).

d) En déduire la limite lorsque n tends vers $+\infty$ de $\frac{\sum_{k=0}^{n}(J_k+I_k)}{I_n}$.

<u>EXERCICE V</u> (Pour toutes les séries)

Un nombre premier n'a que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

La liste des nombres premiers est {2, 3, 5, 7, 11, 1 , 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, . . . }

On dit qu'un nombre entier n est abondant si la somme de ses diviseurs est supérieure ou égale à 2n.

Dans le cas contraire, on dit qu'il est déficient.

Par exemple, la somme des diviseurs de 12 est : 1 + 2 + 3+ 4 + 6 + 12 = 28 ; on 28 > 2 × 12, donc 12 est abondant.

On dit qu'un nombre entier est sphénique s'il est le produit de trois nombres premiers différents.

Par exemple : 12 = 2 × 2 × 3 n'est pas sphénique. 30 = 2 × 3 × 5 est le plus petit entier sphénique.

1. *a)* 2014 est-il sphénique ? 2016 est-il sphénique ?

b) Vérifier que 230 et 231 sont des entiers consécutifs sphéniques. Idem pour 1309, 1310 et 1311.

c) Est-il possible de trouver quatre entiers consécutifs sphéniques ?

2. Soit n un entier sphénique tel que $n = p \times q \times r$ où p, q et r sont trois nombres premiers vérifiant : $2 \leq p < q < r$.

a) Montrer que n a 8 diviseurs et que leur somme est égale à $(p + 1)(q + 1)(r + 1)$.

b) En déduire que n est abondant si et seulement si $\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right) \geq 2$.

c) En déduire que si $p > 3$, alors n est déficient.

3. Étude du cas $p = 2$.

a) Montrer que n est abondant si et seulement si : $\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right) \geq \frac{4}{3}$.

b) Déterminer tous les nombres sphéniques abondants.

<u>EXERCICE VI</u> (uniquement pour la série C)

1. Résoudre dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^4 + 3z^2 + 1 = 0$.

Montrer que les solutions sont conjuguées deux à deux.

2. Écrire le polynôme $4z^4 + 3z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.

3. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égale à 2. Le nombre entier naturel P est déterminé par :

P $=\alpha_n r^n + \alpha_{n-1}r^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + \alpha_1 r + \alpha_0$, où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots\cdots \alpha_1, \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \leq \alpha_{n-1} < r, \ldots, 0 \leq \alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\cdots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$.

Cette écriture est dite « écriture de P en base r ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base 6 et en base 4 respectivement).

P: 4125, LOMÉ TOGO ; Tel : 90 35 21 31 / 90 69 99 51/ 92464560/98 11 80 06/90 05 30 70
E-mail : follygbetouladede@gmail.com ou togomath@yahoo.fr

a) Montrer que a+5 est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a puis de b et c.
b) Donner l'écriture de P dans le système décimal.
En déduire que dans tout système de numérotation de base b supérieur ou égal à 5 le nombre $\overline{40301}$ est un multiple de $\overline{211}$ (ces deux nombre sont écrits en base b).
c) On prend b égal à neuf (9). Écrire dans cette base le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$.

<u>EXERCICE VII</u> (uniquement pour la série C)
Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ on considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre I d'affixe 1 d'angle $\frac{\pi}{4}$ et l'application H_k qui au point M(x, y) associe le point M'(x, y') tel que : $\begin{cases} x' = kx - k - 1 \\ y' = ky \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.

1. *a)* Justifier que H_k est une application affine.
Préciser $\varphi_k(\vec{e}_1)$ et $\varphi_k(\vec{e}_2)$ où φ_k désigne l'application linéaire associée à H_k.
b) H_k est-elle bijective ? (On discutera suivant les valeurs de k).
c) Pour quelles valeurs de k, H_k est-elle une isométrie ?
d) Déterminer si possible l'ensemble des points invariants par H_k.
e) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de H_k.
f) Soit (D) : $ax+by+c = 0$. Trouver une équation de (D') image de (D) par H_k.
Donner les conditions sur les nombres réels a, b et c pour que (D) soit globalement invariante par H_k.
2. *a)* Écrire la transformation complexe associée à $\mathcal{R}$.
b) Soit K (-1, 0). A tout point M d'affixe Z, on associe par $\mathcal{R}$ le point M_1 d'affixe Z_1.
Soit $G_1 = \text{bar}\{(K,-1) ; (M,1) ; (M_1,2)\}$.
i) Calculer l'affixe de Z_{G_1} de G_1 en fonction de Z.
ii) Trouver l'ensemble des points G_1 lorsque M décrit la droite (Δ) : $x = 2$.
3. *a)* Écrire la transformation complexe associée à H_k.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{R}oH_k$.
4. Soit A_0, A_1 et A_2 les points d'affixes respectives $1 + 5i$, $1 + i$ et $-1 - i$.
a) Placer ces points dans le plan complexe P.
b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2.
On notera Ω son centre.
c) Déterminer les coordonnées de $A_3 = S(A_2)$ et de $A_4 = S(A_3)$.
d) Soit $S_n = \underbrace{SoSo\cdots\cdots oS}_{n \text{ termes}}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de S_n ?
Pour quelles valeurs de n, S_n est-elle une homothétie ?
e) Soit $A_n = S_n(A_3)$ et $U_n = \Omega A_n$. Calculer U_n et $\sum_n U = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$ en fonction de n.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_n U$.
5. Soit L le point d'affixe $-1 + 3i$.
a) Démontrer que LA_1A_4 est un triangle rectangle en L.
Soit $G_2 = \text{bar}\{(L,4) ; (A_1,3) ; (A_4,5)\}$. Calculer l'affixe du point G_2.
b) Soit l'application h : N→ $\overrightarrow{NL}.\overrightarrow{NA_1} + 2\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_4} + 3\overrightarrow{NA_4}.\overrightarrow{NL}$.

i) Calculer $h(A_4)$.
ii) Exprimer h(N) en fonction de $\|\overrightarrow{NG_2}\|^2$ et $h(G_2)$.
iii) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points N de P tels que : h(N) =18.

P: 4125, LOMÉ TOGO ; Tel : 90 35 21 31 / 90 69 99 51/ 92464560/98 11 80 06/90 05 30 70
E-mail : follygbetouladede@gmail.com ou togomath@yahoo.fr

EXERCICE VIII (Pour toutes les séries)

L'herbe est bien haute autour de la bergerie de Monsieur Seguin. Il faudrait tondre. Blanchette, son inséparable chèvre, va s'en charger. Monsieur Seguin l'attache au bout d'une corde et fixe l'autre bout de la corde à un piquet planté le long d'un des murs de la bergerie. La chèvre peut brouter ainsi toutes les herbes que la corde lui permet d'atteindre.

La base de la bergerie est un rectangle de 6 m de long sur 4 m de large, et la longueur de la corde disponible pour les mouvements de la chèvre est de 10 m. On suppose que le terrain est bien plan et on assimile le piquet et la chèvre à des points.

1. Calculer l'aire exacte que peut brouter Blanchette si Monsieur Seguin plante son piquet à l'un des coins de la bergerie.

2. Montrer que Monsieur Seguin doit justement placer son piquet à l'un de ces coins s'il veut que Blanchette broute une aire maximale.

EXERCICE IX (Pour toutes les séries)

On considère le nombre T=2016………………..2016 écrit en recopiant 2016 fois le nombre 2016.

T est un nombre de 8064 chiffres.

T est- il divisible par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 ? Justifier la réponse.