Huitème édition des Olympiades Togolaises(OTM) et Concours Miss Mathématiques

Deuxème tour
Date: Samedi 19 Mai 2018
Niveau: Première C
Durée: 3 h 30

NB: Il est demandé aux candidats de laisser toute trace de recherches, justifier et détailler ses réponses et de laisser une ligne au moins entre deux questions. Les dernières feuilles sont les brouillons.

Exercice 1.

Dessinez un cube C (un dessin même approximatif en perpective suffira).
Soient A un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est-à-dire que le milieu du segment $[AB]$ soit le centre du cube.
Considérons un autre cube C' admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés.
Certaines arêtes de C rencontrent des arêtes de C'. Justifiez le fait que, en dehors de A et B, on obtient ainsi six points d'intersection entre une aréte de C et une arête de C'.
Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres. V étant le volume de C, quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes C et C'?

Exercice 2. ***Eloge de la régularité***

Pierre a construit un parcours de marche à pied de 15 km entre les points A et B. Ce parcours se divise en trois parties, chacune d'au moins 1 km: la première est une montée, la seconde est en terrain plat, la troisième est une descente.
L'objectif est de se conformer à un rythme de progression donné. Les marcheurs doivent parcourir les montées à la vitesse de 4 km/h, les descentes à 6 km/h, et marcher à 5 km/h en terrain plat. Dans ces conditions, le parcours de A vers B s'effectue en exactement 3 heures.

1. Clara a effectué le parcours, de B vers A. Elle a mis 3 heures. Prouver qu'elle a couru un moment.

2. Isabelle a effectué le parcours, elle aussi de B vers A. Elle a mis 3 heures et quart. Prouver qu'elle s'est arrêtée un moment.

Exercice 3. ***La sécurité dans le désordre***

Un fabricant de serrures propose un nouveau modèle de code de protection:
• On enregistre un nombre, appelé code initial, formé des trois chiffres 1, 2 et 3, chacun apparaissant une et une seule fois. On ferme la porte.
• Pour ouvrir la porte, il faut composer un nombre, lui aussi formé des trois chiffres 1, 2 et 3 apparaissant une et une seule fois, mais aucun des trois n'occupant la même place que dans le code initial. Ainsi, si le code initial est 132, le nombre 321 permet d'ouvrir la porte, 123 ne le permet pas.

1.a. Si le nombre 123 permet d'ouvrir la porte, quels sont les codes initiaux possibles?

b. Si le nombre 123 ne permet pas d'ouvrir la porte, quels sont les codes initiaux possibles?

c. On suppose que des essais infructueux ne bloquent pas le mécanisme d'ouverture. Une personne désireuse d'entrer peut ainsi essayer plusieurs fois. Montrer que la série 123 - 231 - 132 -213 permet d'ouvrir la porte.

d. Existe-t-il une suite de trois nombres permettant d'ouvrir la porte?

On améliore le système: le code initial est un nombre formé avec les quatre chiffres 1, 2, 3 et 4, le mode d'emploi étant le même que précédemment.

2.a. Un code initial étant fixé, combien de nombres différents permettent d'ouvrir la porte?

b. Y a-t-il une série de quatre nombres permettant d'ouvrir la porte quel que soit le code initial?

3. Dans le cas d'un code initial à cinq chiffres, y a-t-il une série de huit nombres permettant d'ouvrir la porte?

Exercice 4.

Soit $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}$. Le dernier terme étant formé de n chiffres 1.

Démontrer que $S_n = \dfrac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$.

Indication: On pourra calculer $9S_n$.

Exercice 5.

Le repère (O,I,J) est orthonormé.
Soit f la fonction définie par: $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentive de f.

1. Démontrer que f est impaire et périodique de période 2π.
2. Démontrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(2\cos x - 1)x(\cos x + 1)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
4. Tracer $(\mathscr{C})$ sur $[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}]$.