Huitième édition des Olympiades Togolaises de Mathématiques et Miss Mathématiques

Date : 21 Avril 2018

N.B. Il est demandé au candidat de laisser toute trace de recherches, justifier et détailler ses réponses et de laisser une ligne au moins entre deux questions. Les dernières feuilles sont les brouillons.

LES CALCULATRICES SONT AUTORISEES.

PARTIE A (Terminales littéraire et technique). **Durée : 2h30.**

Exercice 1.

Soient f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ et h la fonction définie par

$$h(x) = \left[\frac{x^2}{ln2} + \frac{2x}{(ln2)^2} + \frac{2}{(ln2)^3}\right]2^{-x}$$

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes en justifiant ta réponse.

1. $f'(x) = \frac{x(2-xln2)}{2^x}$
2. $sur\ [0;+\infty[\,, f\ admet\ un\ minimum\ \alpha\ lorsque\ x = \frac{2}{ln2}$
3. $h'(x) = -x^2e^{-xln2}$
4. $\left(-h(x)\right)' = f(x)$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{lnx}{ln10}$

5. $g(2x) = g(2) + g(x)$
6. $g(2^n) = ng(2)$
7. $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{ln2}{ln10}$
8. $g^{-1}(y) = 10^y\ définie\ sur\ \mathbb{R}\ est\ la\ réciproque\ de\ g.$

Exercice 2

Soit f une fonction de variable réelle x définie par $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ et

$Cf\ sa\ courbe\ représentative\ dans\ le\ repère\ orthonormé\ (O,\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier le sens de variation de f dans son ensemble de définition Df.
2. Trouver les réels a et b tels que $f(x) = ax + \frac{b}{x-2}\ \forall\ x \in Df$
3. Montrer que f admet deux asymptotes. Préciser la nature et les équations de ces asymptotes.
4. Etudier la position relative de Cf par rapport à la droite (A) d'équation y = x
5. Tracer les deux asymptotes, Cf et la tangente au point $x_0 = e$.

Exercice 3

On désigne par f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x+1} + ln\left(\frac{x}{1+x}\right),\ x \in [1;+\infty[$

1. Déterminer la limite de la fonction en $+\infty$.
2. Démontrer que $\forall\ x \in [1;+\infty[\,, f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie pour tout entier naturel non nul par*:

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

4. Montrer que $U_{n+1} - U_n = f(n) \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. En déduire le sens de variation de (U_n).

PARTIE B (Terminales scientifiques). **Durée : 3h30.**

Exercice 1(série D et C).

Soit $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe (chaque étape sera notée.
2. Représenter l'aire Q=$\int_1^5 f(x)dx$ sur le graphe.
3. Etudier la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$de nombre réels définie par : $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n}$ (sens de variation et convergence)
4. L'équation (T) : f(x) = 1 admet –elle une unique solution réelle sur$]0, +\infty[$?
5. On considère la suite de nombre réels définie par : $W_{n+1} = W_n \times f(W_n)$. On te rappelle que si la limite de la suite (W_n) existe alors les termes W_n *et* W_{n+1} admettent une même limite lorsque n tend vers infini. En supposant que l'équation (T) admet une unique solution, montrer que la limite de la suite (W_n) existe.

Exercice2(Série D et C)

On considère une fonction g continue et dérivable sur un intervalle fermé et borné I = [a; b], a<b tel que pour tout x de I, g(I) est inclus dans I, il existe un réel positif **k** ***tels que*** $|g'(x)| \leq k$ *avec* $k < 1$. Soit (x_n) une suite de nombres réels définie par : pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = g(x_n)$

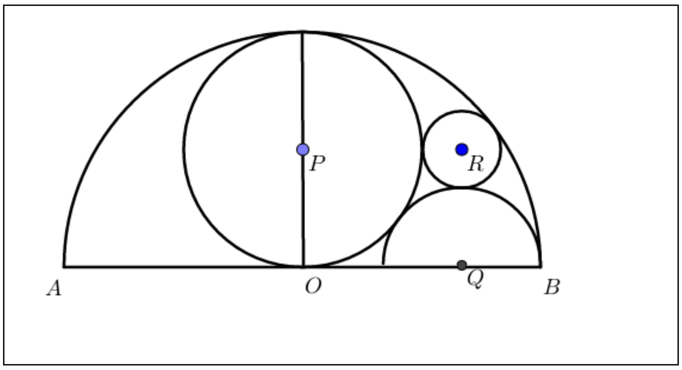
1. Montrer que pour tout réel x et y, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$.
3. Montrer que $|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$, p un entier naturel non nul.

4. Démontrer que$|x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leq k^{p-1}|x_{n+1} - x_n|$. En déduire que :
$$|x_{n+p} - x_n| \leq \left(\sum_{i=1}^{p-1} k^i\right)|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{1+k}|x_{n+1} - x_n|$$
5. Montrer que $\forall\, n, |x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

En tenant compte de tous ces informations, l'équation g(x) = x admet-elle une solution unique dans I ?

Exercice 3(Pour la série D et C)

S1 est le demi-cercle de centre O et de diamètre AB. Le cercle S2 est le cercle de rayon OP, de centre P, tangent au cercle S1 et tangent en O. Un autre cercle de centre Q tangent au cercle S3 de centreR. Le cercle S3 est tangent au cercle S2.



Montrer que le quadrilatère OPRQ est un rectangle.

Exercice 4 (Uniquement pour la série D)

Soit z un nombre complexe vérifiant les propriétés suivantes : |z|< $1\theta_0 \in$ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $tel\ que\ \forall\ \theta \in [-\theta_0;\theta_0], il\ existe\ \rho > 0, z = 1-\rho e^{i\theta}$.

1. Calculer $\frac{|z-1|}{1-|z|}$
2. En remarquant que $\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|)\ montrer\ que\ \frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2cos\theta-\rho}$

Exercice 5(Uniquement pour la série C)

Le but de cet exercice c'est de montrer que

$$A = \sum_{n=1}^{(2N+1)^2-1}(-1)^{E(\sqrt{n})} = (-1)^{E(\sqrt{1})} + \cdots + (-1)^{E\left(\sqrt{(2N+1)^2-1}\right)} = 2N$$

Où $E(\sqrt{n})$ désigne la partie entière de la racine carrée de l'entier naturel n. p est un entier naturel impair.

1. Quelle est la valeur de $E(\sqrt{n})$ lorsque n varie entre p² à (p+1)²-1 puis entre (p+1)² à (p+2)² - 1
2. Montrer que$(-1)^{E(\sqrt{p^2})} + (-1)^{E(\sqrt{p^2+1})} + \cdots + (-1)^{E\left(\sqrt{(p+1)^2-1}\right)} + \cdots + (-1)^{E\left(\sqrt{(p+2)^2-1}\right)} = 2.$
3. Montrer alors que$(-1)^{E(\sqrt{(2k+1)^2})} + (-1)^{E\left(\sqrt{(2k+1)^2+1}\right)} + \cdots + (-1)^{E\left(\sqrt{(2k+3)^2-1}\right)} = 2, \forall\ k.$

On donne

$$A = \sum_{n=1}^{(2N+1)^2-1}(-1)^{E(\sqrt{n})} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=(2k+1)^2}^{(2k+3)^2-1}(-1)^{E(\sqrt{n})}\right)$$

4. Montrer que$A\ =\ 2N.$