Sujet 2

République de Côte d'Ivoire - Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement Technique et de la Formation Professionnelle

BAC BLANC UEMOA — **Durée : 4 heures**

SESSION 2019 — **Coefficient : 4**

MATHEMATIQUES - SERIE : D

Cette épreuve comporte trois (3) pages numérotées 1 sur 3 ; 2 sur 3 et 3 sur 3
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé.

<u>Exercice</u> 1 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indique son numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

1. f et g sont deux fonctions.
a, b et l sont soit des nombres réels, soit $-\infty$, soit $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$, alors

a) $\lim\limits_{x\to b}(f o g)(x) = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to a}(g o f)(x) = l$; c) $\lim\limits_{x\to b}(f o g)(x) = l$; d) $\lim\limits_{x\to a}(g o f)(x) = b$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ est égale à :

a) $-\infty$; b) 0 ; c) -1 ; d) 1.

3. Soit n un entier naturel non nul.
La dérivée de la fonction $x \mapsto (3x-1)^n$ sur $\mathbb{R}$ est :

a) $x \mapsto (3x-1)^{n-1}$; b) $x \mapsto 3n(3x-1)^{n-1}$; c) $x \mapsto 3(3x-1)^{n-1}$; d) $x \mapsto n(3x-1)^{n-1}$

4. Si pour tout nombre réel non nul x, $3 - \dfrac{1}{x} < f(x) < \dfrac{1}{x} + 3$, alors la limite de f en $+\infty$ est égale à :

a) 0 ; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) 3.

<u>Exercice</u> 2 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction $x \longmapsto -\sin x \cos^4 x$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto 2 + \cos^5 x$ sur $\mathbb{R}$.
2	Si une fonction f admet un extrémum en a, alors $f'(a) = 0$.
3	La fonction $x \mapsto 2x - \sqrt{2x+4}$ est dérivable en -2.
4	La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 3+x, & si \quad x \le -1 \\ x^2+x, & si \quad x > -1 \end{cases}$ est continue en -1.

Exercice 3 (4 points)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3.
Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des feuillus.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères, alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre dans son stock.
On considère les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2» ;
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;
- C : « l'arbre choisi est un conifère » ;
- F : « l'arbre choisi est un feuillu ».

a) Construis un arbre pondéré traduisant la situation.
b) Calcule la probabilité pour que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
c) Justifie que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
d) L'arbre choisi est un conifère. Détermine la probabilité qu'il l'ait acheté chez l'horticulteur H_1 (on arrondira le résultat à 10^{-3} près).

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
b) Calcule la probabilité pour que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères.
On arrondira le résultat à l'ordre 3.

Exercice 4 (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives i ; $2i$ et 1.
On considère l'application f qui, à tout point M du plan d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{2iz}{z - i}$

1. Détermine les affixes des points M du plan tels que : $f(M) = M$.

2. Détermine, sous forme algébrique, les affixes des points B' et C', images respectives des points B et C par f.

3. a) Démontre que, pour tout point M distinct de A, l'affixe z' de M' vérifie : $z' - 2i = \dfrac{-2}{z - i}$

b) Déduis-en que, si le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1, alors son image M'appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

<u>Exercice</u> 5 (5 points)

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.

1. Démontre que f est une fonction impaire, puis interprète graphiquement ce résultat.

2. a) Détermine la limite de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat.
   b) Détermine la limite de f en $+\infty$.

3. a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{2}{e^x - 1}$.
   b) Démontre que la droite (D_1) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe (C_f).
   c) Etudie la position relative de (C_f) et (D_1) sur $]0 ; +\infty[$.

4. a) Démontre que : $\forall\ x \in\ ]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2 + \dfrac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$.
   b) Etudie les variations de f sur $\left]0;+\infty\right[$.
   c) Dresse le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

5. Construis la courbe $\left(C_f\right)$ sur $\mathbb{R}^*$ et ses asymptotes.

<u>Exercice</u> 6 (4 points)

Une usine fabrique et commercialise des sachets de poudre de cacao. Sa capacité journalière de production est comprise entre 1 000 et 3 000. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en milliers de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 3] par la fonction B définie par : $B(x) = \frac{-1}{2}x^2 + x + 2 + 2\ln x$.

Le Directeur de l'usine veut accroître le chiffre d'affaires de l'entreprise. Il demande donc au comptable de l'usine le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Le comptable t'associe à ce projet.

Détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.