# 22$^{\text{e}}$ édition des Olympiades Pan Africaines de Mathématiques

Abuja: 20 Août - 29 Août, 2015

Premier jour: 24 Août 2015

Durée : 4 h 30

---

**1. Montrer que l'inégalité**

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+9}+\sqrt{19-3x}<9$$

**est vérifiée pour tous les réels $x$ pour lesquels le membre gauche est défini.**

---

**2. Un hexagone convexe $ABCDEF$ est tel que**

$$AB = BC \quad CD = DE \quad EF = FA$$

**et**

$$\widehat{ABC} = 2\widehat{AEC} \quad \widehat{CDE} = 2\widehat{CAE} \quad \widehat{EFA} = 2\widehat{ACE}.$$

**Montrer que $(AD)$, $(CF)$ et $(EB)$ sont concourantes.**

---

**3. Soit $a_1, a_2, ..., a_{11}$ des entiers. Montrer qu'il existe des nombres $b_1, b_2, ..., b_{11}$, avec chaque $b_i$ égal à $-1, 0$ ou $1$, et non tous nuls, tels que le nombre**

$$N = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{11}b_{11}$$

**soit divisible par $2015$.**

---

22$^{\text{e}}$ édition des Olympiades Pan Africaines de Mathématiques

Abuja: 20 Août - 29 Août, 2015

Second jour: 25 Août 2015

Durée : 4 h 30

---

**4. Pour un entier $n$ strictement positif on note $d(n)$ son plus grand diviseur impair. Calculer la somme $d(1008) + d(1009) + \cdots + d(2015)$.**

---

**5. Dans un chapeau se trouvent sept cartes, et sur la carte numérotée $k$ est écrit le nombre $2^{k-1}$, $k = 1, 2, ..., 7$. Solarin prend au hasard des cartes du chapeau, une carte à la fois, jusqu'à ce que la somme des nombres écrits sur les cartes dans sa main dépasse $124$.**
**Quelle est la somme la plus probable qu'il peut obtenir?**

---

**6. Soit un quadrilatère $ABCD$ (à diagonales non perpendiculaires).**

- **La perpendiculaire issue de $A$ à la droite $(BC)$ coupe $(CD)$ en $K$.**
- **La perpendiculaire issue de $A$ à la droite $(CD)$ coupe $(BC)$ en $L$.**
- **La perpendiculaire issue de $C$ à la droite $(AB)$ coupe $(AD)$ en $M$.**
- **La perpendiculaire issue de $C$ à la droite $(AD)$ coupe $(AB)$ en $N$.**

1. **Montrer que $(KL)$ est parallèle à $(MN)$.**
2. **Montrer que $KLMN$ est un parallélogramme si $ABCD$ est cyclique.**

---