U.M.A

Commission OPAM

$25^{ièmes}$ OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Rabat du 1 au 7 juillet 2017

Jour 1 : Mardi 4 juillet 2017 **Durée : 4 h 30 min**

Problème 1

On considère la suite réelle (x_n) définie par $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ et $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ pour tout entier naturel n.
On définit la suite (y_n) par $y_n = x_n^2 + 2^{n+2}$ pour tout entier naturel n.
Démontrer que pour tout $n > 0$, y_n est le carré d'un entier impair.

Problème 2

Soient $x,\ y$ et z des réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 3xyz$.
Démontrer que $x^2y + y^2z + z^2x \geqslant 2(x + y + z) - 3$.
Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Problème 3

Soit n un entier strictement positif. Trouver, en fonction de n, le nombre de couples (x, y) d'entiers strictement positifs solutions de l'équation

$$x^2 - y^2 = 10^2.30^{2n}.$$

Montrer de plus que ce nombre n'est jamais un carré.

U.M.A

Commission OPAM

$25^{ièmes}$ OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Rabat du 1 **au** 7 **juillet** 2017

Jour 2 : Mercredi 5 juillet 2017 **Durée : 4 h 30 min**

Problème 4

Déterminer tous les nombres réels x tels que $\dfrac{1}{[x]} + \dfrac{1}{[2x]} = \{x\} + \dfrac{1}{3}$, où $[x]$ désigne la partie entière de x et $\{x\} = x - [x]$.
Par exemple, $[2.5] = 2$, $\{2.5\} = 0.5$ et $[-1.7] = -2$, $\{-1.7\} = 0.3$.

Problème 5

Les nombres de 1 à 2017 sont écrits sur un tableau. Deka et Farid jouent au jeu suivant : chacun d'entre eux, à son tour, efface un des nombres. Celui qui efface un multiple de $2, 3$ ou 5 perd et le jeu se termine. Y a-t-il une stratégie gagnante pour Deka ?

Problème 6

Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Le cercle de diamètre $[AC]$ recoupe le cercle circonscrit au triangle ABH en K. Montrer que le point d'intersection des droites (CK) et (BH) est le milieu du segment $[BH]$.