Association Togolaise pour la Promotion des Mathématiques au Secondaire (ATPMS)
N⁰ 1411/MATDCL-SG-DLPAP-DOCA ;Tel :90352131/90699951/98118006 .
BP 4125 mail :togomath@yahoo.fr. Siege Agbalepedo à côté de la gare routiére (face Ecole la Methode)

Septième édition des Olympiades Togolaises de Mathématiques (OTM) et Miss Mathématiques : *Premier tour.*

Date : 01 Avril 2017
Niveau : Terminales.
Durée : 3h 30

N.B. Il est demandé au candidat de laisser toute trace de recherches, justifier et détailler ses réponses et de laisser une ligne au moins entre deux questions. Les dernières feuilles sont les brouillons.

Exercice 1 Serie C)

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 2^{2n}$ $et\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ $sont\ divisible\ par\ 7$;
2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que n+2 divise 2n-1.
3) Démonter que pour tout entier relatif n les nombres n+2 et n^2+3n-1 sont premiers entre eux.
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ $l'équation(E): 45x - 28y = 6.$
5) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ $le\ système\ suivant: \begin{cases} PGCD(x;y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$

Exercice 1 (Série D,F,G) .

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O , $\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}$),
On considère les points M_n d'affixes $Z_n = (1 + i\sqrt{3})(\frac{i}{2})^n$ *où* n est un nombre entier naturel.
1/ Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n puis Z_n en fonction de Z_0 et n.
2/ Donner Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
3/ Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique 4cm)
4 / Déterminer la distance OM_n en fonction de n.
5/ a) Montrons que l'on a $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout entier naturel n.
b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_k M_{k+1}$.Déterminer L_n en fonction de l'entier n. En déduire sa limite.
6/ Déterminer une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}})$ en fonction de l'entier n.
Pour quelles valeurs de n, les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés

Exercice2 (Problème série C).

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $on\ considère\ la\ courbe$ (C_m) d'équation :
$y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$, où m désigne un nombre réel donné.

1) Vérifier que le point A (3 ;0) appartient à la courbe (C_m) quel que soit le réel m.
2) On suppose que $m \neq 0$.
   a) Montrer que la courbe (C_m) est une conique à centre, de centre I_m dont on précisera les coordonnées. Préciser, suivant les valeurs de m, s'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole.
   b) Construire les courbes (C_{-1}) et (C_1) (figure1)
3) Soit (a ; b) un couple de nombres complexes .T est la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par z'=az+b
   a) Déterminer a et b pour que le point A (3 ;0) ait pour image par T le point A'(3 ;-3) et que le point B(-3 ;0) ait pour image par T le point B'(-3 ;3) .Préciser alors la nature de T et ses éléments caractéristiques.
   b) Justifier que l'ensemble (C'_{-1}), transformé (C_1) par T, est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   c) Exprimer les coordonnées de x' et y' du point M'en fonction des coordonnées x et y de M, puis x et y en fonction de x' et y'.
   d) En déduire une équation de (C'_1) transformée de (C_1) par T. Construire la courbe (C'_1) (sur la figure1)

4-a) On donne la droite (D) d'équation y=5x-21.
a) Déterminer une équation (D'), image de (D) par T.

b) U et V (U d'ordonnée positive) sont les points communs à (C_1) et (D), et U' et V' leurs images par T. Déterminer les couples de coordonnées des points U, V, U' et V'.

c) Soit S la surface limitée par la courbe (C_1) et le segment [UV]. Hachurer sur la figure 1 la surface S et son image S' par T. Calculer l'aire de S' donnée par : A (S')=$\int_{\frac{3}{2}}^{9}\left[-\frac{9}{x}-\left(\frac{2}{3}x-7\right)\right]dx$.En déduire l'aire de S.

5) Dans cette question, on étudie le cas où m=0.

a) Quelle est la nature de la courbe (C_0) ? Faire une deuxième figure représentant la courbe (C_0). (figure2).

b) On appelle G le barycentre du système $\{(A,2);(B,1);(M,1)\}$. $M\ décrit$ (C_0). On appelle (γ_0) $la\ courbe\ décrite\ par\ G.$

Démontrer que (γ_0) est l'ensemble transformé de (C_0) par une homothétie de centre $I_{-1}(1\ ;0)$ dont on précisera le rapport. On appelle M_1 et M_2 les points de (C_0) d'abscisses respectives 4 ; 7 dont les coordonnées sont positives. Construire les barycentres G_1 et G_2 correspondants.

c)On appelle (C'_0) l'image par T de (C_0) et on appelle (γ'_0) l'image par T de (γ_0).

Démontrer que (γ'_0) est l'image de (C'_0) par une homothétie que l'on précisera. Construire les images par T des points M_1, M_2, G_1, G_2 et les courbes (C'_0) et (γ'_0)

Exercice 2 (Problème série D, F ,G)

PARTIE A

On pose $I_0=\int_1^e x dx$ et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^e x(lnx)^n\,dx$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établissez la relation $2I_n + nI_{n-1} = e^2$. Calculer I_2.
3) Montrer que la suite de terme générale I_n est décroissante. Déduire en utilisant la relation de récurrence de 2), l'encadrement $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$. Calculer la limite de I_n et la limite de nI_{n+1}

PARTIE B

U est la suite définie pour tout n de n de $\mathbb{N}^*$, par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)\,dx$

1/ a) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$.

b) Etudier le sens de variation de la suite U

c) En déduire que la suite U est convergente. On note sa limite.

2/ Soit $\propto\ \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors on a $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\propto} sin^n(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\propto}^{\frac{\pi}{2}}(sin^n(x)\,dx$ (Relation de Chasles).

a) Montrer que $U_n \leq \left(\frac{\pi}{2}-\propto\right) sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\propto\right)+\propto$
b) Démontrer alors que $l \leq (\propto)$
c) Expliquez pourquoi l = 0 ?

Exercice 3 (PROBLEME Toute série) Etude d'une fonction puissance

Le but de ce problème est d'étudier la fonction à variable réelle définie par $f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ pour tout x élément de $]0,+\infty[$.

PARTIE A **Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit g : $]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ $\quad définie\ par\ g(x) = -2ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}$

1/ Etudier les variations de g

2/ Etudier le signe de $g\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$. En déduire le signe de g(x) pour tout x strictement positif.

3 / g est elle bijective sur $]0,+\infty[$? Justifie ta réponse.

PARTIE B **Etude de de la fonction f**

Pour faciliter l'étude de la fonction f, nous adoptons la forme de la forme suivante $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

4/Etudier les limites de f(x) aux bornes de l'intervalle $]0,+\infty[$

5/ Calculer la dérivée de f puis montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} f(x)$. En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

6/ Préciser les asymptotes de la courbe représentative de f

7/ représenter la courbe représentative de f et celle de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 4 (toutes series).

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres. Par exemple n=24 est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est 6, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.
   b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?
2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b. Soit *n* un entier non nul. Donner un nombre Harshad de *n* chiffres.
3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.