
HUITÈME ÉDITION DES OLYMPIADES TOGOLAISES(OTM) ET CONCOURS MISS
MATHÉMATIQUES

Deuxième tour
Date: Samedi 19 Mai 2018
Niveau: Première D
Durée: 3 h 30

NB: Il est demandé aux candidats de laisser toute trace de recherches, justifier et détailler ses réponses et de laisser une ligne au moins entre deux questions. Les dernières feuilles sont les brouillons.

Exercice 1.

A, B et C sont trois points non alignés du plan. Soit K le milieu de $[AB]$ et J le barycentre du système $\{(A, 1); (C, 2)\}$. La droite (KJ) coupe la droite (BC) en M. A l'aide d'un repère convenablement choisi, déterminer par le calcul, les coefficients des points B et C pour que M soit le barycentre des points B et C.

Exercice 2. *La sécurité dans le désordre*

Un fabricant de serrures propose un nouveau modèle de code de protection:

- On enregistre un nombre, appelé code initial, formé des trois chiffres 1, 2 et 3, chacun apparaissant une et une seule fois. On ferme la porte.
- Pour ouvrir la porte, il faut composer un nombre, lui aussi formé des trois chiffres 1, 2 et 3 apparaissant une et une seule fois, mais aucun des trois n'occupant la même place que dans le code initial. Ainsi, si le code initial est 132, le nombre 321 permet d'ouvrir la porte, 123 ne le permet pas.

1.a. Si le nombre 123 permet d'ouvrir la porte, quels sont les codes initiaux possibles?

b. Si le nombre 123 ne permet pas d'ouvrir la porte, quels sont les codes initiaux possibles?

c. On suppose que des essais infructueux ne bloquent pas le mécanisme d'ouverture. Une personne désireuse d'entrer peut ainsi essayer plusieurs fois. Montrer que la série 123 - 231 - 132 - 213 permet d'ouvrir la porte.

d. Existe-t-il une suite de trois nombres permettant d'ouvrir la porte?

On améliore le système: le code initial est un nombre formé avec les quatre chiffres 1, 2, 3 et 4, le mode d'emploi étant le même que précédemment.

2.a. Un code initial étant fixé, combien de nombres différents permettent d'ouvrir la porte?

b. Y a-t-il une série de quatre nombres permettant d'ouvrir la porte quel que soit le code initial?

3. Dans le cas d'un code initial à cinq chiffres, y a-t-il une série de huit nombres permettant d'ouvrir la porte?

Exercice 3. Population d'entiers

Une série statistique porte sur une population de 2017 nombres entiers.

- 1) On suppose dans cette question que les 2017 nombres étudiés dans cette série sont:
1, 2, 3, . . . , 2017.
Déterminer la médiane de cette série.
Déterminer la moyenne de cette série.
- 2) Soit n un nombre entier naturel non nul. On suppose dans cette question que la série contient : 800 fois le nombre $-n$, 600 fois le nombre n^2 et 617 fois le nombre 2017.
 - a) Calculer la moyenne et la médiane pour $n = 10$, puis pour $n = 100$.
 - b) Déterminer n pour avoir la plus petite moyenne possible.
 - c) Déterminer n pour avoir la plus grande médiane possible.
- 3) On suppose que les 2017 nombres étudiés sont des entiers naturels non nuls.
 - a) Quelle est la plus petite moyenne possible lorsque la médiane est 2018?
 - b) Quelle est la plus grande médiane possible lorsque la moyenne est 2018?

Exercice 4.

x étant un nombre réel.

- 1.a) Démontrer que: $\cos 5x = \cos x(16 \cos^4 x - 20 \cos^2 x + 5)$.
- b) Démontrer que $(1 - \cos x)(4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)^2 = 1 - \cos 5x$.
- 2.a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation: $\cos 5x = 1$.
- b) Dédire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{4\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{5}$.