Huitème édition des Olympiades Togolaises(OTM) et Concours Miss Mathématiques

Deuxème tour
Date: Samedi 19 Mai 2018
Niveau: Seconde CD
Durée: 3 h 30

<u>NB</u>: Il est demandé aux candidats de laisser toute trace de recherches, justifier et détailler ses réponses et de laisser une ligne au moins entre deux questions. Les dernières feuilles sont les brouillons.

Exercice 1.

On donne deux nombres réels x et y.

1) Calculer $(2x-y)^2$.

2) Prouver que, pour tous nombres réels x et y, on a: $5x^2+y^2+4 \geq 4x+4xy$.

3) Pour quelles valeurs de x et y, l'égalité a-t-elle lieu?

Exercice 2.

On considère le rectangle $ABCD$, et deux points M et N tels que $M \in [DC]$ et $N \in [BC]$.
L'unité de mesure est le centimètre.
On donne: $AB = 10$; $BC = 6$; $DM = x$ et $BN = \dfrac{x}{2}$

1) Faire une figure.

2) Démontrer que le triangle NCM existe si $0 \leq x < 10$.

3) Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour que l'aire du triangle MCN soit inférieure ou égale au quart de l'aire de $ABCD$.

Exercice 3.

Soit les réels a, b et c tels que: $1 < a \leq 2$, $-3 \leq c \leq -1$ et $Y = a - ac + \dfrac{2}{a}$. Déterminer un encadrement de Y.

Exercice 4.

On considère le triangle ABC et le point K tel que $[BK]$ soit la hauteur issue du sommet B.
On donne: $AB = 3\ cm$; $AC = 7\ cm$; $AK = 2\ cm$.

1) Faire une figure.

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, en justifiant la réponse.

Exercice 5.

On considère le polynôme P_m définie par: $P_m(x) = x^3+mx^2+mx+1$, où m est un paramètre réel.

1)a) Calculer $P_m(-1)$ et en déduire le polynôme Q_m tel que $P_m(x) = (x+1)Q_m(x)$.

b) Ecrire le polynôme Q_m sous forme canonique.

2) On pose: $P(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$.

a) Factoriser $P(x)$.

b) Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 6.

A, B et C sont trois points du plan tels que $AB = 7$, $BC = 4$ et $AC = 5$.
Soit f l'application définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ par: $f(M) = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$.

1) Calculer $f(A)$, $f5B)$ et $f(C)$.

2) Soit G le point du plan $\mathcal{P}$ défini par: $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

a) Démontrer que: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

b) En déduire $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

C) Placer le point G.

d) Calculer GA^2, GB^2 et GC^2 puis en déduire le calcul de $f(G)$.

3) Démontrer que $f(M) = 4MG^2 + f(G)$.

4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que: $f(M) = 74$.