Huitème édition des Olympiades Togolaises(OTM) et Concours Miss Mathématiques

Deuxème tour
Date: Samedi 19 Mai 2018
Niveau: Terminale C
Durée: 3 h 30

<u>NB</u>: Il est demandé aux candidats de laisser toute trace de recherches, justifier et détailler ses réponses et de laisser une ligne au moins entre deux questions. Les dernières feuilles sont les brouillons.

Exercice 1.

On considère les fonctions dérivables suivantes :

- f définie de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$;
- F définie de $[0;\frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ par: $F(x) = f(\sin x)$.

Le but de cet exercise est de calculer l'intégrale: $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$.

1) Calculer $F'(x)$ pour tout x de $[0;\dfrac{\pi}{2}]$.
2) Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[0;\dfrac{\pi}{2}]$, $F(x) = \int_0^x \cos^2 t dt$.
3) Sans calculer les intégrales, démontrer l'égalité: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$
   En déduire la valeur commune des deux intégrales.
4) Déduire des questions précédentes que: $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle et telle que:
(P) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, f(x+x') + f(x-x') = 2f(x)f(x')$.
On designe (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthoginal (O, I, J).

1) Démontrer que:
   a) $f(0) = 1$.
   b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.
2) On suppose dans toute la suite qu'il existe un nombre réel a tel que $f(a) = 0$.
   a) Justifier que: $a \neq 0$.
   b) Démontrer que: $f(2a) = -1$.
   c) Démontrer que: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(a+x) = -f(a-x)$.
3) Interpréter graphiquement le résultat de chacune des questions 1.b) et 1.c).

4) On se propose de déterminer une période de f.

a) Démontrer que f est périodique de période $4a$.

b) En déduire que: $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(4ka) = 1$ et $f[(4k+2)a] = -1$.

c) Démontrer que: $\forall k \in \mathbb{Z},\ f[(2k+1)a] = 0$.

d) Trouver un exemple de fonction f continue sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle et vérifiant la propriété (P).
Construire la courbe représentative C de f sur l'intervalle $[-4a; 4a]$ où $a = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3.

ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par O le milieu de $[AC]$, D le symétrique par rapport à (BC).

1.a. Démontrer qu'il existe une rotation f qui transforme A en C et O en D.
Préciser les éléments caractéristiques de f.

b. Démontrer que $f = S_{(BO)} {}^\circ S_{(AB)}$.

2. On pose: $h = S_{(OD)} {}^\circ f^{-1}$ et on désigne par (Δ) la médiatrice de $[BD]$.
Démontrer que h est la symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

Exercice 4. ***Boules de même couleur***

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\dfrac{1}{2}$.

1.a. Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $P(G) = \dfrac{7}{15}$.

b. Calculer $P(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.

2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.

a. Soit x le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
Démontrer que $P(G) = \dfrac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$.

b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable?

3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.

a. On suppose que l'urne présente la configuration (a, b) c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, a boules rouges et b boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque $n = (a-b)^2$.

b. Réciproquement démontrer que si n est le carré d'un entier p alors il existe deux entiers naturels a et b avec $a \geq b$ que l'on exprimera en fonction de p tels que la configuration (a, b) conduise à un jeu équitable.

c. Donner six couples (a, b), conduisant à un jeu équitable.

4. Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration (a, b, c), c'est-à-dire, par exemple, a boules blanches, b rouges et c noires.

a. Montrer que si $n = 13$, le jeu est équitable lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = 91$. En déduire une configuration (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour $n = 13$.

b. Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple (x, y), conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de z non nulle telle que le triplet (x, y, z) conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.

c. Donner un triplet (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.

5. On suppose que l'urne contient des boules de m couleurs différentes où $m \geq 2$.
Démontrer que la configuration $(1, 3, 9, \ldots, 3^{m-1})$conduit à un jeu équitable.